ЛЕКЦИЯ 6

6 ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ.

6.1 Электростатика

6.1.1 Основные понятия

Взаимодействия между заряженными частицами носят название электромагнитных. В природе существуют только два типа электрических зарядов: заряды, подобные возникающим на стекле, потёртом о кожу (их назвали положительными), и заряды, подобные возникающим на эбоните, потертом о мех (отрицательные). Одноименно заряженные частицы отталкиваются, разноименно заряженные частицы - притягиваются. Существует минимальный заряд (e), называемый элементарным, которым обладают все элементарные частицы. Носителями отрицательного элементарного заряда являются электроны, положительного - протоны. Модуль элементарного заряда $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Заряд нейтрона равен нулю.

В последнее время физики ввели в обиход новые элементарные частицы - кварки. Кваркам приписывают дробные электрические заряды +2/3 e и -1/3 e. Однако с введением кварков представление о дискретности электрического заряда не снимается, а переносится на другой уровень.

Макроскопическое тело электрически заряжено в том случае, если оно содержит избыточное количество элементарных частиц с одним знаком заряда. Отрицательный заряд тела обусловлен избытком электронов по сравнению с протонами, а положительный - недостатком электронов. Поскольку заряд q образуется совокупностью элементарных зарядов, он является целым кратным элементарному заряду, т. е. $q = Ze$. Все тела в природе способны электризоваться, т.е. приобретать электрический заряд. Электризация тел может осуществляться различными способами: соприкосновением (трением), электростатической индукцией и т.д.

Электрические заряды могут исчезать и возникать вновь. Однако всегда исчезают или возникают одновременно по два разноимённых заряда. Например, электрон e^- и позитрон e^+ (античастица электрона) при встрече аннигилируют, т.е. превращаются в нейтральные гамма-фотоны. При том исчезают e^- и e^+. Существует и обратный процесс, называемый рождением пары, в ходе которого гамма фотон, попадая в поле ядра, превращается в пару частиц – e^- *и* e^+. Процесс приводит к появлению зарядов e^- и e^+. Если через поверхность, ограничивающую систему зарядов, не могут проникать электрические заряды, система называется **электрически изолированной.** Для электрически изолированной системы справедлив *закон сохранения электрического заряда*: ***в электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов всех частиц остается неизменной:*** $q_1+q_2+\cdots+q_n = const$. Если расстояние между заряженными телами во много раз больше их размеров, то ни форма, ни размеры тел не влияют на взаимодействие между ними. Такие заряды называются точечными. Таким образом, ***точечным называется заряд, сосредоточенный на теле, линейные размеры которого пренебрежимо малы, по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, с которыми он взаимодействует.***

6.1.2 Закон Кулона

Закон, которому подчиняется сила взаимодействия точечных зарядов, был экспериментально установлен Шарлем Кулоном в 1785 году и носит его имя. Этот закон является основным законом электростатики. Для исследования взаимодействия точечных зарядов Кулон использовал крутильные весы, схематически представленные на рисунке 3.1. Исследовалась зависимость силы взаимодействия зарядов q_1 и q_2 от их величины и от расстояния между зарядами r. Кулон установил:

сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов в вакууме прямо пропорциональна произведению зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль линии, соединяющей заряды.

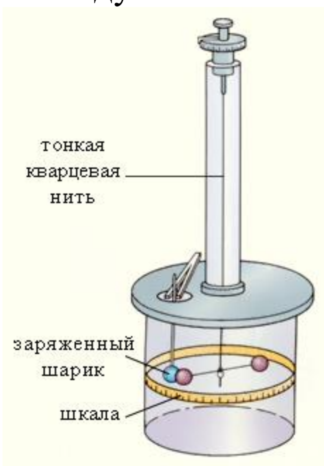


Рисунок 3.1

Закон Кулона может быть выражен формулой:

$$\vec{F} = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \qquad (3.1)$$

где $\frac{\vec{r}}{r}$ - единичный радиус-вектор, направленный вдоль линии, соединяющей заряды , k_1 – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц и, как выяснилось позже, от среды, в которой находятся заряды:

$$k_1 = k/\varepsilon,$$

где k зависит только от выбора системы единиц, а ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды, показывающая во сколько раз сила взаимодействия зарядов в вакууме больше, чем в однородном диэлектрике.

Коэффициент k в СИ принято записывать в форме $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Величину ε_0 (греческая буква «эпсилон») называют электрической постоянной. В СИ

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Кл/(Нм}^2) = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м} \qquad (3.2)$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ \text{м/Ф}$$

Таким образом формула (3.1) принимает вид:

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (3.3)$$

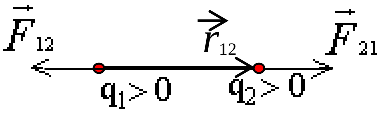


Рисунок 3.2

На рисунке 3.2 приведён пример взаимодействия двух положительных зарядов q_1 и q_2: $\vec{F}_{12}$ - сила, действующая на первый заряд q_1 со стороны второго заряда q_2, $\vec{r}_{12}$ - радиус-вектор, проведённый от первого заряда ко второму. Закон Кулона для силы $\vec{F}_{12}$ запишется в виде:

$$\vec{F}_{12} = -k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \qquad (3.4)$$

знак « - » указывает на то, что сила $\vec{F}_{12}$ направлена против вектора $\vec{r}_{12}$.

Аналогично для силы $\vec{F}_{21}$:

$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon\, r^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \qquad (3.5)$$

В скалярной форме

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{\varepsilon r^2} \qquad (3.6)$$

В случае взаимодействия одноименных зарядов кулоновская сила является силой отталкивания и считается положительной (F > 0). В случае взаимодействия разноименных зарядов кулоновская сила является силой притяжения и считается отрицательной (F < 0).

Зная закон взаимодействия точечных зарядов, можно вычислить силу взаимодействия заряженных тел конечных размеров. Для этого надо разбить каждое заряженное тело на столь малые кусочки, что их заряды dq можно считать точечными, вычислить по формуле (3.3) силу взаимодействия между всеми зарядами dq, взятыми попарно у двух тел, и произвести векторное суммирование этих сил. Практически это суммирование сводится к интегрированию и в общем случае является сложной математической задачей. Задача упрощается, если заряженные тела однородны и имеют правильную форму.

В СИ единицей заряда является Кулон (Кл). Величина заряда в 1 Кл устанавливается с помощью единицы силы тока 1 А: *один Кулон* (*1 Кл*) - *это заряд, проходящий за 1 с через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А*. Заряд в 1 Кл очень велик. Сила взаимодействия двух точечных зарядов по 1 Кл каждый, расположенных на расстоянии 1 км друг от друга, чуть меньше силы, с которой земной шар притягивает груз массой 1т. Поэтому сообщить небольшому телу заряд в 1 Кл невозможно. Отталкиваясь друг от друга, заряженные частицы не смогут удержаться на теле.

6.1.3 Электрическое поле. Напряженность электрического поля

Электрические заряды вносят определенные изменения в окружающее их пространство, проявляющееся в том, что на другие электрические заряды, внесенные в это пространство, действуют силы. Если в пространстве обнаруживается действие сил на электрические заряды, то говорят, что в нем существует электрическое поле. Поле является одним из видов материи, которому присуща масса и определенная энергия. Поле, создаваемое неподвижными электрическими зарядами, называется электростатическим.

Силовой характеристикой электрического поля является напряжённость. ***Напряжённостью поля в данной точке называется векторная физическая величина, численно равная силе, действующей на единичный пробный положительный заряд, помещенный в данную точку поля, и направленная так же, как и сила:***

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{3.7}$$

Пробным называют заряд, который настолько мал, что не искажает исследуемое поле. Обычно пробный заряд берут положительным.

Напряженность электрического поля точечного заряда выражается формулой:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{3.8}$$

Модуль вектора напряжённости электрического поля точечного заряда:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}. \tag{3.9}$$

Напряженность поля точечного заряда в вакууме

$$\left|\vec{E}_0\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}. \tag{3.10}$$

Из формул (3.9) и (3.10) следует, что

$$\varepsilon = E_0 / E,$$

т.е. относительная диэлектрическая проницаемость показывает во сколько раз напряжённость электрического поля в однородном диэлектрике меньше, чем в вакууме.

Если электростатическое поле создано системой точечных зарядов, то в соответствии с <u>***принципом суперпозиции***</u>, будем иметь:

напряженность результирующего поля $\vec{E}$, создаваемого системой точечных зарядов, равна геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i .$$

При непрерывном распределении зарядов, т.е. в случае заряженных протяжённых тел, это суммирование сводится к интегрированию:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} \qquad (3.11)$$

Из формул (3.9) и (3.10) следует, что вектор $\vec{E}$ зависит от свойств среды, в которой создаётся поле. Вспомогательной силовой характеристикой электростатического поля, не зависящей от свойств среды, ***является вектор электрической индукции*** или ***вектор смещения электрического поля:***

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \qquad (3.12)$$

Для поля точечного заряда:

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} , \qquad (3.13)$$

$$\left|\vec{D}\right| = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} . \qquad (3.14)$$

Единица напряженности - 1 Н/Кл = 1 В/м. Единица вектора электрической индукции (вектора электрического смещения) – 1 Кл/м^2 =1Ф·В/м^2.

6.1.4 Электрическое поле диполя

В качестве примера применения принципа суперпозиции рассмотрим поле электрического диполя.

Электрическим диполем называется система двух равных по модулю разноименных по знаку точечных зарядов, расстояние между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля.

Вектор $\vec{l}$, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и равный по модулю расстоянию между ними, называется плечом диполя.

Электрический момент диполя (дипольный момент) $\vec{P}$ - вектор, численно равный произведению положительного заряда на плечо диполя и

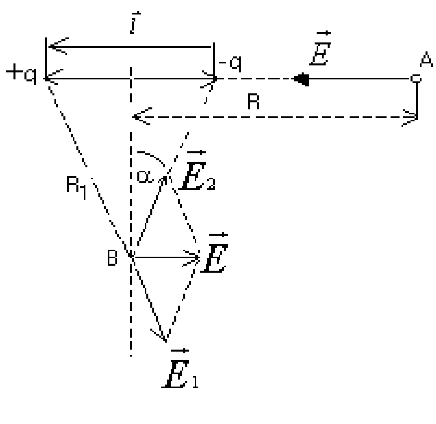


Рисунок 3.3

направленный по оси диполя от его отрицательного заряда к положительному:

$$\vec{P} = q\vec{l}\ ; \qquad |P| = q \cdot l.$$

В соответствии с принципом суперпозиции напряжённость в произвольной точке поля диполя равна:

$$\vec{E} = \vec{E}_{+} + \vec{E}_{-},$$

где $\vec{E}_{+}$ и $\vec{E}_{-}$ - напряжённости полей зарядов $+q$ и $-q$, соответственно.

Для точек, расположенных на оси диполя, например, в точке A (рисунок 3.3), получаем:

$$\text{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left(R-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(R+\frac{l}{2}\right)^2}\right] \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{2ql}{R^3}. \qquad (3.15)$$

Для точек, расположенных на перпендикуляре к оси диполя, проходящем посредине между зарядами, находим:

$$\text{E} = 2\text{E}_1\sin\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{2ql}{R_1^2\, 2R_1} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{ql}{R^3}, \qquad (3.16)$$

где R – расстояние от оси диполя до точки B.

6.1.5 Графическое изображение электростатических полей. Поток вектора напряженности

Графически электростатическое поле изображают с помощью линий напряженности (силовых линий). ***Линии напряженности, это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора*** $\vec{E}$ в этой точке (рисунок 3.4). Силовым линиям приписывается направление, совпадающее с направлением вектора напряженности. Чтобы с помощью линий напряженности можно было характеризовать не только направление, но и величину напряженности электростатического поля, их проводят с определенной густотой: число силовых линий, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярной линиям напряженности, должно быть равно модулю вектора $\vec{E}$.

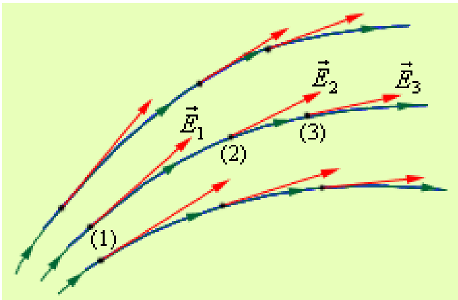


Рисунок 3.4

Если поле создается точечным зарядом, то линии напряженности - радиальные прямые, выходящие из положительного заряда, и входящие в отрицательный заряд.

Электрическое поле, напряженность которого одинакова во всех точках пространства, называется *однородным*. Однородное поле изображается силовыми линиями одинаковой густоты.

Число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку dS, нормаль $\vec{n}$ к которой образует угол α с вектором $\vec{E}$ (рисунок 3.5), равно :

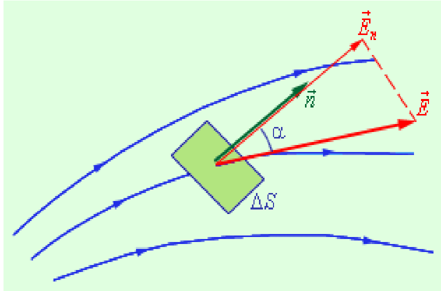


Рисунок 3.5

$$d\Phi_E = EdScos\alpha = E_n dS, \qquad (3.17)$$

где $d\Phi_E$ – элементарный поток вектора напряженности через площадь dS.

Полный поток через произвольную поверхность S в произвольном электростатическом поле (рисунок 3.6)определится по формуле:

$$\Phi_E = \int E{\cdot}dS\ cos\alpha = \int E_n dS = \int\left(\vec{E}, d\vec{S}\right), \qquad (3.18)$$

где $\vec{S} = S\cdot\vec{n}$. Таким образом, электрический поток – скалярная величина. Он определяется через скалярное произведение векторов $\vec{E}$ и $\vec{S}$. Для плоской поверхности в однородном электрическом поле формула для потока вектора напряжённости имеет вид:

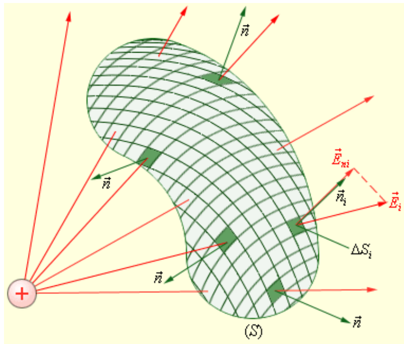


Рисунок 3.6

$$\Phi_E = E{\cdot}Scos\alpha = E_n S = \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) \qquad (3.19)$$

Поток вектора напряженности является алгебраической величиной: он зависит не только от конфигурации поля, но и от выбора направления вектора $\vec{n}$. Для замкнутых поверхностей за положительное направление нормали принимается внешняя нормаль, т.е. нормаль, направленная наружу области, охватываемой поверхностью.

Аналогично потоку вектора напряженности (формулы (3.18), (3.19)) вводится понятие потока вектора электрической индукции через произвольную поверхность:

$$\Phi_D = \int D{\cdot}dS\ cos\alpha = \int D_n dS = \int\left(\vec{D}, d\vec{S}\right),$$

Для однородного поля поток вектора $\vec{D}$ через плоскость ΔS:

$$\Phi_D = D{\cdot}\,\Delta S\ cos\alpha = D_n \Delta S = \left(\vec{D}, \Delta\vec{S}\right).$$

Единица потока вектора напряженности 1 В·м.

Единица потока вектора электрической индукции – 1 Кл = 1 Ф·В

6.1.6 Работа при перемещении заряда в электрическом поле

Рассмотрим работу электростатических сил при перемещении заряда $+q$ из точки 1 в точку 2 вдоль произвольной траектории (рисунок 3.7). Работа силы $\vec{F}$ при элементарном перемещении $d\vec{l}$ равна:

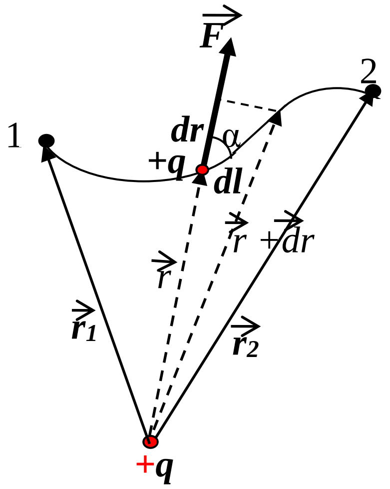


Рисунок 3.7

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{l} = Fdl\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}dl\cos\alpha \qquad (3.20)$$

Так как $dl\cos\alpha = dr$, то

$$dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}dr.$$

Работа по перемещению заряда q_0 из точки 1 в точку 2 :

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{q\,q_0}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q\,q_0}{r_1} - \frac{q\,q_0}{r_2}\right) \qquad (3.21)$$

Из уравнения (3.21) следует, что работа электрического поля по перемещению заряда не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной и конечной точек, следовательно, ***кулоновские силы - консервативные, а электростатическое поле – потенциальное.*** *Работа сил электростатического поля при движении электрического заряда по любой замкнутой траектории равна нулю*. Если величина перемещаемого заряда равна единице, то работа по замкнутому контуру выразится формулой:

$$\oint(\vec{E}, d\vec{l}) = 0 \qquad (3.22)$$

Интеграл (3.22) называется ***циркуляцией вектора напряжённости электростатического поля.*** Равенство циркуляции нулю является необходимым и достаточным условием потенциальности поля.

Работа потенциального поля равна изменению потенциальной энергии, взятой со знаком минус:

$$A = -(W_{p2} - W_{p1}) = W_{p_1} - W_{p_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q\,q_0}{r_1} - \frac{q\,q_0}{r_2}\right) \qquad (3.23)$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия заряда q_0 в поле заряда q равна:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q_0}{r} + C, \qquad (3.24)$$

где C – произвольная постоянная, зависящая от выбора системы отсчета. Если принять что при удалении заряда в бесконечность его потенциальная энергия становится равной нулю, то $C = 0$ и

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q_0}{r} \qquad (3.25)$$

6.1.7 Потенциал электростатического поля

Энергетической характеристикой электростатического поля является потенциал.

Потенциалом электростатического поля в данной точке называется физическая величина, численно равная потенциальной энергии, которой будет обладать единичный заряд, помещённый в эту точку поля:

$$\varphi = W_p / q_0 \qquad (3.26)$$

Из этой формулы следует,что потенциальная энергия заряда в электростатическом поле

$$W_p = q\varphi .$$

Для однородного электростатического поля

$$W_p = qEd.$$

Потенциал поля точечного заряда q, согласно формулам (3.25) и (3.26), равен:

$$\varphi = k\,\frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad (3.27)$$

Работа по перемещению заряда q_0 в электростатическом поле из точки 1 в точку 2 , согласно формулам (3.23) и (3.26), может быть представлена в виде:

$$A = -(W_{p2} - W_{p1}) = -q_0(\varphi_2 - \varphi_1) = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = q_0 U \qquad (3.28)$$

$$A = q_0\,U, \qquad (3.29)$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ - разность потенциалов, называемая напряжением электростатического поля, q_0 – перемещаемый заряд. Потенциал можно выразить и через работу по перемещению заряда из данной точки в бесконечность. Пусть заряд q_0 перемещается из точки $r_1 = r$ в точку $r_2 = \infty$. Тогда, согласно формулам (3.23) и (3.27), будем иметь:

$$\varphi = A_\infty / q_0 \qquad (3.30)$$

Потенциал данной точки поля - это скалярная физическая величина, численно равная работе по перемещению единичного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность.

Для одноименных зарядов $qq_0>0$ и потенциальная энергия их взаимодействия (отталкивания) положительна, для разноименных зарядов $qq_0<0$ и потенциальная энергия их взаимодействия (притяжения) отрицательна.

Принцип суперпозиции: Если поле создается несколькими зарядами, то потенциал поля равен алгебраической сумме потенциалов полей этих зарядов:

$$\varphi = \sum \varphi_i \qquad (3.31)$$

Для поля, создаваемого заряженным телом (не точечным), суммирование в формуле (3.31) сводится к интегрированию:

$$\varphi = \int d\varphi \qquad (3.32)$$

Единица потенциала и разности потенциалов: 1 В = 1 Дж/Кл.

6.1.8 Эквипотенциальные поверхности. Связь между напряжённостью и потенциалом.

В электрическом поле можно провести поверхность так, чтобы её точки имели один и тот же потенциал. Такие поверхности называются ***поверхностями равного потенциала или эквипотенциальными поверхностями.*** Эквипотенциальной является поверхность любого проводника в электростатическом поле.

Пусть заряд q_0 перемещается вдоль эквипотенциальной поверхности на расстояние $d\ell$. Работу, совершаемую при этом, можно рассчитать по формуле:

$$dA = F \cdot d\ell \cos\alpha = q_0 E\, d\ell \cos\alpha.$$

С другой стороны:

$$dA = -q_0\, d\varphi = 0, \quad \text{т.к.} \quad \varphi = const.$$

Следовательно:

$$q_0 E\, d\ell \cos\alpha = 0, \qquad q_0 E\, d\ell \neq 0, \qquad \text{значит} \quad \cos\alpha = 0, \qquad E \perp d\ell.$$

Таким образом, ***напряженность поля перпендикулярна к эквипотенциальным поверхностям.***

Рассмотрим две эквипотенциальные поверхности с потенциалами φ и $\varphi + d\varphi$. Точечный заряд q_0 перемещается

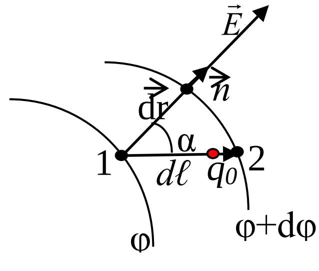


Рисунок 3.8

из точки 1 в точку 2 (рисунок 3.8). Совершаемая при этом работа равна:

$$dA = q_0E\, d\ell\, \cos\alpha = q_0E\, dr = -\, q_0\, d\varphi.$$

Из этого уравнения следует, что

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dr}, \qquad (3.33)$$

где $d\varphi / dr$ – градиент потенциала, характеризует быстроту изменения потенциала вдоль силовой линии. Знак « - » говорит о том, что напряжённость поля направлена в сторону убывания потенциала. Итак:
напряжённость поля численно равна градиенту потенциала и направлена в сторону его убывания.

Учтём, что $\vec{E}$ и $\vec{r}$ можно представить через их проекции на координатные оси:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}, \qquad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

Тогда, согласно формуле (3.33), можно записать:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

и связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля примет вид:

$$\vec{E} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}, \qquad (3.34)$$

Для однородного поля:

$$E = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta d} = \frac{U}{\Delta d}, \qquad (3.35)$$

где Δd – расстояние между эквипотенциальными поверхностями по нормали к ним, U – напряжение между этими поверхностями.

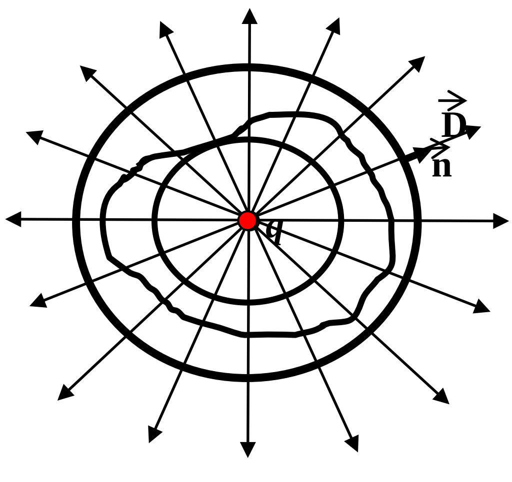


Рисунок 3.9

6.1.9 Теорема Остроградского-Гаусса

Расчёт электрического поля (определение напряжённости и потенциала в различных точках поля) с помощью принципа суперпозиции зачастую приводит к громоздкому интегрированию. Теорема Остроградского-Гаусса значительно упрощает эту задачу в случае симметрично расположенных зарядов. Теорема Остроградского-Гаусса связывает поток вектора индукции через произвольную замкнутую поверхность, с электрическим зарядом, находящимся внутри этой поверхности.

Пусть точечный заряд +q создаёт электрическое поле. Окружим этот заряд сферической поверхностью S_1 (рисунок 3.9) и найдем поток вектора электрической индукции через эту поверхность:

$$\Phi_D = D\cdot S\cos\alpha = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = q \qquad (3.36)$$

Очевидно, что такой же поток будет пронизывать не только и другую сферическую поверхность S_2 (рисунок 3.9), но и любую произвольную поверхность (S_3), внутри которой расположен заряд q. Можно показать, что если внутри произвольной поверхности находятся несколько зарядов, то поток вектора электрической индукции будет равен их алгебраической сумме. Таким образом,

поток вектора электрической индукции через любую замкнутую поверхность численно равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри этой поверхности (теорема Остроградского-Гаусса):

$$\Phi_D = \oint D dS\cos\alpha = \sum q_i\,. \qquad (3.37)$$

Если учесть, что $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$ (см. формулу (4.12)) и что для вакуума ε = 1, то $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}_0$ и

$$\Phi_E = \oint E_0 dS\cos\alpha = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i \qquad (3.38)$$

поток вектора напряжённости электрического поля <u>в вакууме</u> через произвольную замкнутую поверхность равен 1/ε₀, умноженной на алгебраическую сумму зарядов, расположенных внутри этой поверхности – это ещё одна формулировка теоремы Остроградского-Гаусса.

6.1.10 Применение теоремы Остроградского-Гаусса.

1. *Расчёт электрического поля сферы, равномерно заряженной по поверхности зарядом q.*

Рассмотрим сферу радиуса R, с общим зарядом q, распределённым по поверхности сферы. Заряженная сфера находится в вакууме.

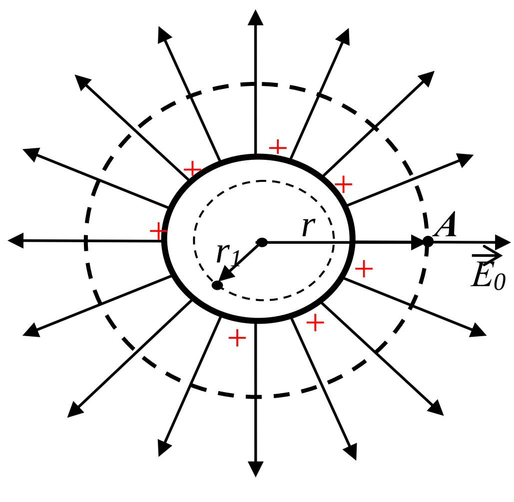


Рисунок 3.10

Определим напряжённость и потенциал поля в некоторой точке А, находящейся на расстоянии *r* от центра сферы. Напряженность поля в каждой точке направлена вдоль радиуса-вектора, проведенного через сферу из её центра, если заряд сферы положителен (рисунок 10), и противоположное ему направление, если заряд сферы отрицателен. Поле, окружающее заряд, обладает сферической симметрией, поэтому для определения напряженности в точке А, проведем через эту точку новую сферическую поверхность, концентрическую с заряженной сферой. По теореме Остроградского-Гаусса

$\Phi_E = E_0 \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$, из этого выражения получим:

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (3.39)$$

В среде с диэлектрической проницаемостью ε напряжённость поля в ε раз слабее, т.е.:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \qquad (3.40)$$

Определим потенциал поля в точке А. По формулам (3.33) и (3.10) имеем:

$$\varphi = -\int_r^\infty E dr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} \qquad (3.41)$$

Таким образом, напряжённость и потенциал поля заряженной сферы при $r > R$ выражаются такими же формулами, как и для точечного заряда.

Определим напряжённость и потенциал поля на поверхности сферы, т.е. на расстоянии R от центра сферы. В этом случае гауссова поверхность совпадает с поверхностью сферы. По теореме Остроградского-Гаусса

$$\Phi_E = E_0 \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

следовательно:

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad (3.42)$$

В среде с диэлектрической проницаемостью ε напряжённость поля в ε раз слабее, т.е.:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2} \qquad (3.43)$$

Определим потенциал поля на поверхности сферы. По формулам (3.33) и (3.10) имеем:

$$\varphi = -\int_R^{\infty} Edr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_R^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R} \qquad (3.44)$$

Определим напряжённость поля и потенциал внутри сферы, например, на расстоянии r_1 от центра. В этом случае гауссова поверхность - сфера радиуса r_1. Так как заряд внутри сферы отсутствует, то по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\Phi_E = E_0 \cdot 4\pi R^2 = 0,$$

$$E_0 = E = 0. \qquad (3.45)$$

Согласно уравнению (3.33), $\vec{E} = -\dfrac{d\varphi}{dr}$, следовательно, внутри сферы

$$d\varphi / dr = 0, \qquad \varphi = \text{const}.$$

Таким образом, напряжённость поля внутри сферы, заряженной по поверхности, равна нулю. Объём сферы эквипотенциален, потенциал во всех точках внутри сферы вплоть до её поверхности равен:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}. \qquad (3.46)$$

2. *Расчёт поля равномерно заряженной бесконечной плоскости.*

Рассмотрим бесконечную плоскость, заряженную равномерно положительным зарядом с поверхностной плотностью σ. Определим напряжённость поля в некоторой точке А, расстояние до которой много меньше размеров плоскости. Электрическое поле расположено по обе стороны плоскости, его силовые линии перпендикулярны плоскости и направлены от неё.

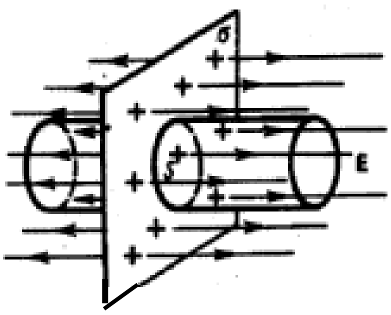


Рисунок 3.11

Из соображений симметрии в качестве гауссовой поверхности удобно выбрать цилиндрическую поверхность с образующей, перпендикулярной заряженной плоскости, а основания - параллельны ей. Цилиндрическая поверхность проведена так, что внутри неё оказался участок заряженной плоскости ΔS. Потоки через основания равны друг другу и равны $E\Delta S$, а поток через боковую поверхность равен 0.

По теореме Остроградского-Гаусса имеем:

$$2E_0\,\Delta S = \sigma\Delta S/\varepsilon_0,$$

следовательно,

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Для поля в среде с диэлектрической проницаемостью ε:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} \tag{3.47}$$

Следует обратить внимание, что в формулу (3.47) не входит расстояние от плоскости до точки А, т.е. электрическое поле равномерно заряженной бесконечной плоскости однородное. Это справедливо до тех пор, пока плоскость можно считать бесконечно большой (пока её размеры много больше расстояния до точки А).

Определим потенциал поля в некоторой точке, находящейся на расстоянии r от плоскости (r направлено вдоль силовой линии). Из уравнения (3.33) имеем:

$$\varphi = -\int E\,dr$$

Если принять, что потенциал заряженной плоскости равен нулю, то потенциал поля на расстоянии r от плоскости равен:

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} r \tag{3.48}$$

3. *Напряженность поля двух бесконечных параллельных плоскостей, имеющих разноименные заряды с поверхностными плотностями* $+\sigma$ *и* $-\sigma$. Напряженность поля каждой отдельной пластины равна по абсолютному значению $\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ (см. формулу (3.47)). В пространстве между плоскостями силовые линии имеют одинаковое направление, напряженности при этом складываются и общая напряженность

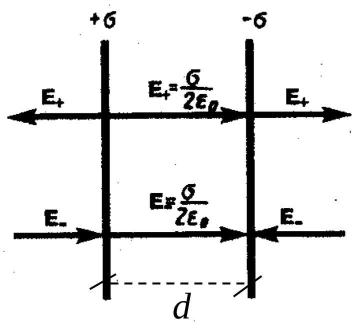


Рисунок 3.12

$$\text{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \tag{3.49}$$

Напряженности поля вне пластин равны нулю, т.к. по абсолютному значению напряженности, создаваемые каждой из них равны, но противоположны по знаку.

Найдём разность потенциалов между пластинами:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \int E\,dr = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\,dr = \frac{\sigma\, d}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

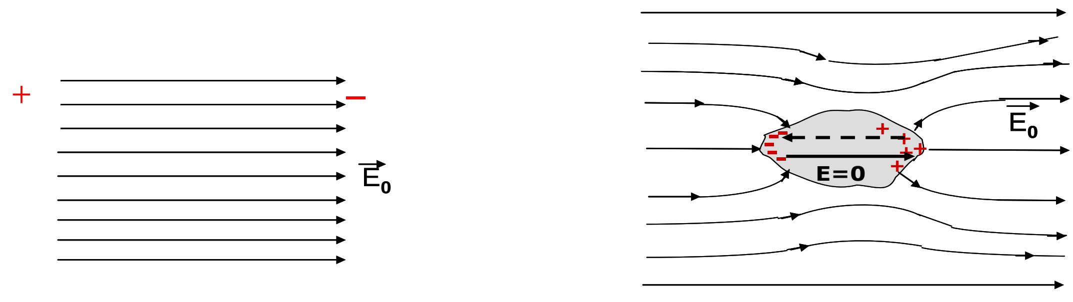
Так как $\varphi_1 - \varphi_2 = U$, то напряжение между пластинами:

$$U = \frac{\sigma\, d}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (3.50)$$

Рассмотренный пример представляет собой ни что иное, как поле плоского конденсатора (см. параграф 6.1.14).

6.1.11 Проводники в электростатическом поле

В проводниках имеются заряженные частицы, способные перемещаться под действием электрического поля. В металлах носителями свободных зарядов являются электроны. На рисунке (3.31 *а*) изображено однородное электри ческое поле напряжённостью $\vec{E}_0$.При помещении в электростатическое поле проводника (рисунок 3.13 *в*) в проводнике происходит перераспределение зарядов -: свободные электроны перемещаются против поля (притягиваются к положительному полюсу источника поля).Правая сторона проводника заряжается при этом положительно. Это явление называется электростатической индукцией. Перемещение свободных электронов происходит до тех пор, пока возникшее по индукции электростатическое поле напряжённостью $\vec{E}'$ (на рисунке 3.13*в* изображено пунктиром) не скомпенсирует внешнее поле.При равновесии зарядов результирующее поле и электрический заряд внутри про водника равны нулю.



(*а*) **(*в*)**

Рисунок 3.13

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$$

Именно поэтому напряженность электрического поля внутри проводящего шара (см. п.6.1.10) равна нулю. На этом основана электростатическая защита. Весь статический заряд проводника сосредоточен на его поверхности.

6.1.12 Диэлектрики в электростатическом поле

Тела, у которых практически отсутствуют свободные заряды, способные приходить в направленное движение под действием электрического поля, называются диэлектриками. Диэлектрики можно разбить на два основных вида: полярные и неполярные. У полярных диэлектриков центры распределения положительных и отрицательных зарядов не совпадают. Их молекулы можно рассматривать как диполи, дипольные моменты которых при отсутствии внешнего электрического поля ориентированы хаотично. В электрическом поле дипольные моменты молекул стремятся ориентироваться вдоль поля, весь объём диэлектрика приобретает дипольный момент. Неполярные диэлектрики состоят из атомов или молекул, у которых центры распределения положительных и отрицательных зарядов совпадают. Следовательно, при отсутствии внешнего электрического поля их дипольные моменты равны нулю. Во внешнем электрическом поле положительные заряды молекул смещаются вдоль поля, а отрицательные – против поля. У молекул, (а следовательно, у всего диэлектрика в целом) появляются дипольные моменты, ориентированные вдоль поля. Таким образом, независимо от типа диэлектрика, в электрическом поле происходит изменение его состояния, называемое поляризацией диэлектрика, которая состоит в том, что весь объём диэлектрика приобретает электрический момент. Поляризация во всех случаях ведёт к уменьшению поля в диэлектрике. Если поле в вакууме имеет напряжённость E_0, то в диэлектрике $E = E_0/\varepsilon$. Очевидно, относительная диэлектрическая проницаемость среды ε зависит от строения и свойств диэлектрика, а также от способности диэлектрика поляризоваться в электрическом поле.

Для установления количественных закономерностей поля в диэлектрике внесем в однородное электрическое поле $\vec{E}_0$, созданного двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями, пластинку из однородного диэлектрика (рисунок 13).

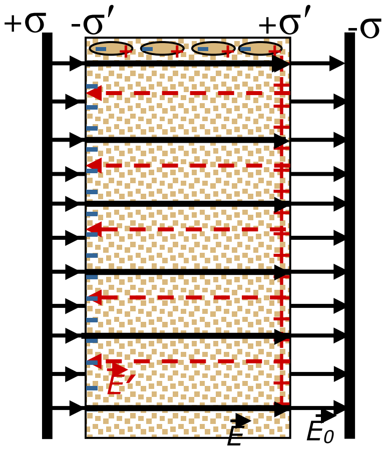


Рисунок 3.14

Под действием поля диэлектрик поляризуется, т. е. весь его объём приобретает электрический (дипольный) момент $\vec{P}_V$, равный сумме дипольных моментов всех его молекул:

$$\vec{P}_V = \sum \vec{P}_i . \qquad (3.51)$$

Дипольный момент единицы объема диэлектрика называется поляризованностью или вектором поляризации:

$$\vec{P} = \frac{\vec{P}_V}{V} . \qquad (3.52)$$

Для большого класса диэлектриков при не слишком сильных полях $P \sim E$ и

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\,\vec{E}, \qquad (3.53)$$

где χ - диэлектрическая восприимчивость вещества.

В результате поляризации на гранях диэлектрика, обращённых к заряженным пластинам, возникают не скомпенсированные заряды. На правой грани диэлектрика, обращенной к отрицательной плоскости, будет избыток положительного заряда с поверхностной плотностью $+\sigma'$, на левой - отрицательного заряда с поверхностной плотностью $-\sigma'$. Эти не скомпенсированные заряды, появляющиеся в результате поляризации диэлектрика, называются связанными или индуцированными. Связанные заряды создают в диэлектрике поле, напряжённость которого $\vec{E}'$ направлена против внешнего поля, созданного свободными зарядами пластин. Так как поверхностная плотность связанных зарядов σ' меньше плотности σ свободных зарядов плоскостей, то не все поле $\vec{E}$ компенсируется полем зарядов диэлектрика: часть линий напряженности пройдет сквозь диэлектрик, другая же часть обрывается на связанных зарядах. Таков механизм ослабления поля в диэлектрике. Результирующее поле в диэлектрике будет:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}' \qquad (3.54)$$

Согласно формуле (3.49) $E' = \sigma'/\varepsilon_0$, поэтому

$$E = E_0 - \sigma'/\varepsilon_0. \qquad (3.55)$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов σ'. Полный дипольный момент пластинки диэлектрика

$$P_V = PV = PSd,$$

где S - площадь грани пластинки, d — ее толщина. С другой стороны, полный дипольный момент, равен произведению связанного заряда каждой грани $q' = \sigma' S$ на расстояние d между ними, т. е.

$$P_V = \sigma' S\, d\ .$$

Таким образом,

$$PSd = \sigma' Sd,$$

или

$$\sigma' = P \qquad (3.56)$$

т. е. поверхностная плотность связанных зарядов σ' численно равна поляризованности P. Тогда выражение для напряженности результирующего поля внутри диэлектрика с учётом с формул (3.53) и (3.56) приобретает вид:

$$E = E_0 - \chi E$$

и

$$E = E_0 / (1+\chi) = E_0 / \varepsilon.$$

Следовательно, относительная диэлектрическая проницаемость среды ε связана с её диэлектрической восприимчивостью χ соотношением:

$$\varepsilon = 1+\chi \qquad (3.57)$$

6.1.13 Электроёмкость уединённого проводника.

Опыты показывают, что различные проводники, заряженные одинаковыми зарядами, имеют разные потенциалы. Это говорит о том, что они обладают некоторым различным физическим свойством. Это свойство характеризуется величиной, называемой электроёмкостью (ёмкостью).

Ёмкость проводника зависит от окружающих тел, поэтому вводится понятие уединённого проводника. ***Проводник называется уединенным, если вблизи его нет других проводников и заряженных тел, способных повлиять на распределение зарядов на данном проводнике.***

Сообщенный проводнику заряд q распределяется по его поверхности так, чтобы напряженность поля внутри проводника была равна нулю. Если уединенному проводнику уже несущему заряд q сообщить еще заряд такой же величины, то второй заряд должен распределиться по проводнику точно таким же образом, как и первый, в противном случае он создаст в проводнике поле, отличное от нуля.

Различные по величине заряды распределяются на уединенном проводнике подобным образом (отношение плотностей заряда в двух произвольных точках поверхности проводника при любой величине заряда будет одним и тем же.).

Увеличение в некоторое число раз заряда приводит к увеличению в то же число раз напряженности поля в каждой точке окружающего проводника пространства. Соответственно в такое же число раз возрастает работа переноса единичного заряда из бесконечности на поверхность проводника, т.е. потенциал проводника. Отсюда вытекает, что *потенциал уединенного проводника пропорционален находящемуся на нем заряду*. Таким образом, для уединенного проводника $q = C\varphi$ и

$$C = q / \varphi, \qquad (3.58)$$

где C - электроемкость (емкость) проводника.

Емкостью уединённого проводника называется физическая величина, численно равная заряду, при сообщении которого ранее незаряженному проводнику его потенциал принимает значение равное единице.

За единицу емкости принимается емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл. Эта единица емкости называется фарадой.

$$1\ Ф = 1\ Кл/В.$$

Уединенные проводники обладают небольшой емкостью (емкость Земли ~700 мкФ). Емкостью в 1 Ф обладал бы уединенный шар радиусом $9 \cdot 10^9$ м, т.е. радиусом в 1500 раз большим радиуса Земли. Поэтому на практике пользуются единицами, равными долям фарады - миллифарадой (мФ), микрофарадой (мкФ), нанофарадой (нФ), пикофарадой (пФ):

$$1\ мкФ = 10^{-6}\ Ф; \quad 1\ пФ = 10^{-12}\ Ф.$$

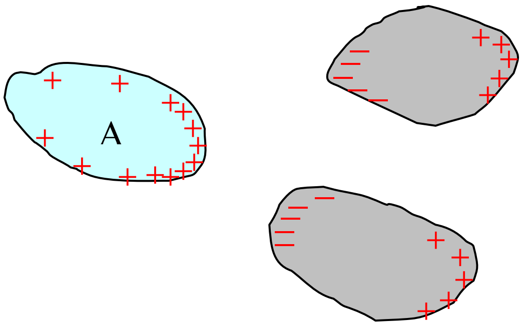


Рисунок 3.15

Формулу электрической емкости уединенного проводящего шара (сферы) можно получить, подставив в формулу (3.58) выражение для потенциала на поверхности заряженной сферы (3.44):

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R.$$

Если вблизи какого-либо проводника A имеются другие проводники, то его электроемкость больше, чем у такого же уединенного проводника. Это объясняется тем, что в процессе сообщения проводнику A заряда q, на окружающих его проводниках возникают индуцированные заряды, при этом на сторонах, обращённых к проводнику A, оказываются заряды противоположные по знаку заряду q. Индуцированные заряды ослабляют поле заряда q и снижают потенциал проводника A, что и означает увеличение его электроемкости благодаря влиянию соседних проводников.

За ёмкость неуединённого проводника принимают физическую величину, выражаемую формулой:

$$C = dq/d\varphi \qquad (3.59)$$

Электроёмкостью неуединённого проводника называют физическую величину, численно равную заряду, который надо сообщить проводнику, чтобы изменить его потенциал на единицу.

Электроёмкость проводника зависит от окружающих проводник тел, от диэлектрических свойств окружающей среды, от размеров и формы проводника. Если проводник находится в однородной изотропной среде, заполняющей все поле, то его электроёмкость пропорциональна относительной диэлектрической проницаемости среды.

6.1.14 Взаимная электроёмкость двух проводников. Конденсаторы

Рассмотрим систему двух проводников, с одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами. Пусть абсолютная величина заряда каждого проводника q, а разность потенциалов проводников φ_1-φ_2. Опыты показывают, что если проводники удалены от других заряженных тел или проводников, то φ_1-φ_2 пропорционально заряду q: $\varphi_1 - \varphi_2 = Cq$ и:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \tag{3.60}$$

где C – взаимная электроёмкость двух проводников. Итак:
взаимная электроёмкость двух проводников, удалённых от других тел и заряженных одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами, это скалярная величина, равная отношению абсолютного значения заряда одного из проводников к разности потенциалов между ними.

Взаимная электроёмкость двух проводников зависит от их размеров, формы, взаимного расположения и от диэлектрических свойств окружающих проводники среды.

Практический интерес представляют системы проводников, электроёмкость которых не зависит от окружающих тел. Такими системами проводников являются конденсаторы. ***Конденсатором называется система двух проводников, разделённых слоем диэлектрика, заряженных одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами.*** Форма и расположение проводников таковы, что поле сосредоточено практически полностью в узком зазоре между проводниками. Сами проводники называются в этом случае обкладками конденсатора. Под зарядом конденсатора понимают абсолютное значение заряда одной из обкладок.

Емкость конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \tag{3.61}$$

Электроёмкость конденсатора то физическая величина, равная отношению заряда q, накопленного на конденсаторе, к разности потенциалов (φ_1 - φ_2) между его обкладками. Разность потенциалов (φ_1 - φ_2) между обкладками конденсатора называется напряжением U между обкладками.

В плоском конденсаторе две параллельные металлические пластины площадью S каждая, расположены на расстоянии d друг от друга и имеют заряды $+q$ *и* $-q$. Используя формулы (3.61) и (3.50), можно получить формулу ёмкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \tag{3.62}$$

где ε - диэлектрическая проницаемость среды заполняющей пространство между пластинами. Можно показать, что ёмкость сферического и цилиндрического конденсаторов определяется, соответственно, по формулам (3.63) и (3.64):

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \tag{3.63}$$

где R_1 и R_2 - радиусы концентрических сфер - обкладок сферического конденсатора;

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon\ h}{\ell n(R_2/R_1)}, \tag{3.64}$$

где h - высота цилиндров, R_1 и R_2 - радиусы цилиндров, концентрически вставленных один в другой.

Из приведённых формул для ёмкостей различных конденсаторов следует, что ёмкость конденсатора зависит от его размеров, формы и типа диэлектрика между обкладками.

6.1.15 Соединение конденсаторов

Каждый конденсатор характеризуется емкостью и максимальным рабочим напряжением. Если напряжение на конденсаторе сделается слишком большим, то конденсатор "пробивается" - между обкладками возникает искра, пробивающая изоляцию. Для получения нужной емкости при данном рабочем напряжении конденсаторы часто соединяют в батареи.

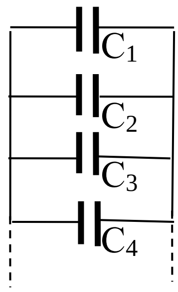


Рисунок 3.16

При параллельном соединении конденсаторов (рис. 3.16) напряжение на всех конденсаторах одинаково: $U_1 = U_2 = U_3 = \cdots = U_n = U$; суммарный заряд равен сумме зарядов на отдельных конденсаторах:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n = U \cdot \sum_{i=1}^{n} C_i = UC.$$

Таким образом, результирующая емкость при параллельном соединении

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n \tag{3.65}$$

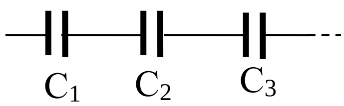


Рисунок 3.17

При последовательном соединении конденсаторов (рисунок 3.17), благодаря явлению индукции, одинаковым для всех конденсаторов будет заряд q, равный полному заряду батареи:

$$q_1 = q_2 = q_3 = \cdots = q.$$

Приложенное напряжение равно сумме напряжений на отдельных конденсаторах:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n.$$

Поэтому для всей батареи справедливо соотношение:

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

Результирующая емкость при последовательном соединении конденсаторов определится из соотношения:

$$1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 + \cdots + 1/C_n \tag{3.66}$$

При последовательном соединении суммируются обратные величины емкостей. Если параллельно соединены n одинаковых конденсаторов и емкость каждого C_0, то ёмкость батареи конденсаторов $C=C_0/n$. Таким образом, при последовательном соединении n одинаковых конденсаторов емкость батареи в n раз меньше емкости отдельного конденсатора , во столько же раз напряжение на каждом конденсаторе меньше напряжения батареи, чем увеличивается допустимое напряжение батареи по сравнению с допустимым напряжением конденсатора.

6.1.16 Энергия системы зарядов, уединённого проводника и конденсатора. Энергия электрического поля

а) Энергия системы неподвижных точечных зарядов.

Найдем потенциальную энергию системы двух неподвижных точечных зарядов q_1 и q_2 в поле друг друга. Каждый из этих зарядов в поле другого обладает энергией:

$$W_1 = q_1 \varphi_{12}, \qquad W_2 = q_2 \varphi_{21},$$

где φ_{12} и φ_{21} -соответственно потенциалы, создаваемые зарядом q_2 в точке нахождения заряда q_1 и зарядом q_1 в точке нахождения заряда q_2.

$$\varphi_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_1}; \qquad \varphi_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_2},$$

поэтому $W_1 = W_2 = W$ и

$$W = q_1\varphi_{12} = q_2\varphi_{21} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_{12} + q_2\varphi_{21}) \tag{3.67}$$

В случае n неподвижных зарядов их взаимная энергия

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i ,$$

где φ_i - потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд q_i всеми зарядами, кроме i-го.

б) Энергия уединенного заряженного проводника

Пусть имеется уединенный проводник, заряд, емкость и потенциал которого соответственно равны: q, C, φ. Увеличим заряд этого проводника на dq. Для этого необходимо перенести заряд dq из бесконечности на уединенный проводник, совершив работу $dA = \varphi\, dq = C\, \varphi\, d\varphi$.

Чтобы зарядить тело от нулевого потенциала до потенциала φ необходимо совершить работу:

$$\mathrm{A} = \int_0^\infty C\varphi\, d\varphi = \mathrm{C}\frac{\varphi^2}{2}. \qquad (3.68)$$

За счет этой работы заряженное тело приобретает энергию, равную:

$$W = C\frac{\varphi^2}{2} = q\varphi/2 = q^2/2C. \qquad (3.69)$$

При замене φ на $\Delta\varphi$, получим формулу для энергии заряженного конденсатора

$$W = C(\Delta\varphi)^2/2 = q\Delta\varphi/2 = q^2/(2C) \qquad (3.70)$$

в) ***Энергия электрического поля.*** Энергия любой системы зарядов сосредоточена в электрическом поле, образуемом этим системами, и распределена в нём с определённой плотностью. Определим плотность энергии электрического поля для простейшего случая – однородное поле плоского конденсатора. Для этого преобразуем формулу для энергии заряженного конденсатора (3.70), используя выражения для емкости конденсатора $C = \varepsilon_0\varepsilon S/d$ и разности потенциала между его обкладками $\Delta\varphi = Ed$, тогда :

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V, \qquad (3.71)$$

где $V = Sd$ - объем конденсатора, а следовательно, и электрического поля между его обкладками.

Объемной плотностью энергии электростатического поля называется энергия, приходящаяся на единицу объёма - $w = W/V$. Из формулы (3.71) следует:

$$w = W/V = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = ED/2 \qquad (3.72)$$

Это выражение справедливо для поля, созданного любой системой зарядов при условии, что среда, в которой создаётся поле – изотропная.